

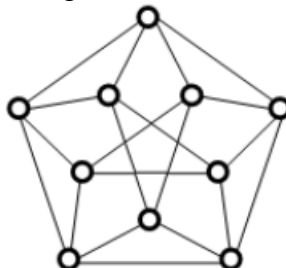
**Задания для муниципального тура Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

**Муниципальный тур Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

7 класс

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а их произведение равно 360 (Ответ обоснуйте).

2. Можно ли раскрасить кружочки (см. рисунок) в три цвета так, чтобы никакие два кружочка, соединенные линией, не были покрашены в один цвет?



3. Пятеро друзей скинулись на покупку. Может ли оказаться так, что любые два друга в сумме внесли менее трети стоимости покупки?

4. Два натуральных числа в сумме дают 2015. А если одно из них поделить на другое с остатком, то в частном получится 25. Найдите все пары таких чисел (и докажите, что других нет).

5. Имена трех одноклассников — Петя, Вася и Витя. Маша знает это, но не знает, кого из мальчиков как зовут. Она может задавать им вопросы, на которые можно отвечать только «да» и «нет». Каждый вопрос задается одному из мальчиков, и отвечает на него только он. Наташе известно, что Петя на все вопросы будет отвечать правдиво, Вася солжет в ответ на первый заданный ему вопрос, Витя солжет в ответ на первый и второй вопросы, а дальше и они будут отвечать правдиво. Как ей за три вопроса узнать имена мальчиков?

**Муниципальный тур Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

8 класс

1. На математическую олимпиаду некоторые участники из-за болезни не смогли прийти. Организаторы подсчитали, что число отсутствующих участников составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих. После того, как из аудитории вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ от числа присутствующих. Сколько участников должно было участвовать в олимпиаде?

2. Иван, Петр, Вася, Семен и Дима имеют фамилии Иванов, Петров, Васильев, Семенов и Дмитриев. Известно, что Иван старше Иванова на 1 год, Петр старше Петрова на 2 года, Вася старше Васильева на 3 года и Семен старше Семенова на 4 года. Кто старше – Дима или Дмитриев и на сколько?

3. По оптимистическому прогнозу экономистов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 10%, в евро на 20%. А в Иваново цены в рублях упадут на 1%. На сколько процентов упадут цены в Иваново в евро, если курс рубля к евро в Москве и в Иваново одинаковый?

4. Организаторы математической олимпиады заметили, что число $11\dots1122\dots22$ (состоящее из 100 единиц и 100 двоек) есть произведение двух последовательных целых чисел. Докажите этот факт и вы.

5. На медиане BM треугольника ABC ($BM > AC/2$) отмечена точка K так, что $BK = AC/2$. Известно, что $\angle BMA = 60^\circ$. Доказать, что $AB = KC$.

**Муниципальный тур Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

9 класс

1. Известно, что квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых значениях x . Может ли оказаться, что $a = \frac{1}{2}$?
2. Петя придумал четырёхзначное число, в записи которого все цифры различны. Известно, что сумма трёх первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трёх последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа? Найдите все возможные значения и объясните, почему других нет.
3. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков у дороги?
4. В треугольнике ABC $AB = 3 \cdot BC$, точка M – середина стороны AB и BD – биссектриса. Найдите угол MDB .
5. Есть 4 одинаковые банки, в них 4 разные краски, каждая банка заполнена на $\frac{3}{4}$. Разрешается переливать любую часть жидкости из одной банки в другую (предполагается, что любое количество жидкости можно перелить из одной банки в другую, если поместится). Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? Выливать краску нельзя.

**Муниципальный тур Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

10 класс

1. Известно, что числа $a+b$ и $\frac{ab}{a+b}$ являются целыми. Докажите, что число $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ также является целым.
2. Известно, что квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют действительных корней. Докажите, что уравнение $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ также не имеет действительных корней.
3. В ряд слева направо лежит 8 кошельков, в каждом по 13 одинаковых монет. Из одного кошелька переложили одну монету в соседний справа кошелек. Кошельки открывать нельзя. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти кошелек, где меньше всего монет?
4. Пусть AL , BM , CN — медианы треугольника ABC , пересекающиеся в точке K . Известно, что около четырехугольника $CLKM$ можно описать окружность, а $AB = 2$. Найдите длину медианы CN .
5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = z^2, \\ y + z = x^2, \\ z + x = y^2. \end{cases}$$

**Муниципальный тур Всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

11 класс

1. Известно, что числа $a+b+c$ и $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ являются целыми. Докажите, что число $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ также является целым.

2. Каждый из двух различных корней квадратного трехчлена $f(x)=x^2+px+q$ и его значение при $x=3$ являются натуральными числами, причем больший корень трехчлена и $f(3)$ – простые числа. Найдите корни трехчлена $f(x)$.

3. Докажите, что если a, b, c – такие положительные действительные числа, что $a < b+c$, то

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

4. Внутри треугольника ABC , в котором $\angle C = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, взята точка M так, что треугольник CMB – равносторонний. Найдите углы MAB и MAC .

5. Дана последовательность x_n , такая, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$. Найдите x_{2015} .