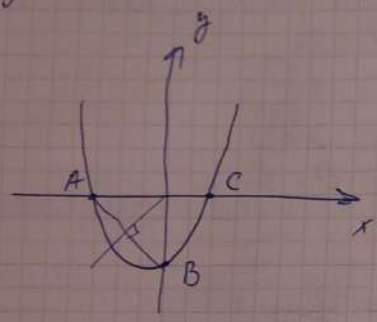
Черновик. ЛТ-224

№1.

$y = x^2 + ax + b$



$A(x_1; 0)$ $x_1 < 0$

$B(0; b)$ $AB \parallel y = -x$

$K = \frac{b}{-x_1}$ $\frac{b}{-x_1} = -1$

$b = x_1$

$x_1^2 + ax_1 + x_1 = 0$

$(x_1 + a + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -a - 1$

$x_1 \neq 0$

№1. ЛТ-224

$x^2 + ax + b$

$A(x_1; 0)$, где x_1 – корень $x^2 + ax + b = 0$

$B(0; b)$

Пусть прямая AB задаётся $y = kx + m$

Т.к. она перпендикулярна прямой $y = x$, то $k = -1$.

С другой стороны, $k = \frac{b - 0}{0 - x_1} = \frac{b}{-x_1}$, $x_1 \neq 0$,

но $\frac{b}{-x_1} = -1$, то $b = x_1$.

~~Т.к. x_1 – корень, то $x_1^2 + ax_1 + b = 0$~~

~~$x_1(x_1 + a + \frac{b}{x_1}) = 0$~~

~~$x_1(x_1 + a + 1) = 0$~~

~~Т.к. $x_1 \neq 0$, то $x_1 + a + 1 = 0$, то~~

~~$x_1 = -(a+1)$~~

~~По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$~~

~~$x_1 \cdot x_2 =$~~

По теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = b = x_1$,

а т.к. $x_1 \neq 0$, то $x_2 = 1$.

$C(x_2;0)$, то $OC = x_2 = 1$.

Ответ: 1.

№2.

Докажем, что при указанных действиях дробь может только увеличиваться.

- Если и числитель, и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится.
- Если прибавить одно и то же натуральное число d к дроби $\frac{a}{b}$, где $a>0$, $b>0$, $a<b$, то значение дроби увеличится.

Доказательство:

$$\frac{a+d}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{(a+d)b - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bd-ad}{b(b+d)} =$$

$= \frac{(b-a)d}{b(b+d)}$, то т.к. $b>a$, то $\frac{a+d}{b+d} - \frac{a}{b} > 0$,

ЛТ-224

то значение дроби увеличится.

Таким образом, мы доказали, что значение дроби не может уменьшиться, но т.к. $\frac{1000}{2021} < \frac{1}{2}$, то из $\frac{1}{2}$ нельзя получить $\frac{1000}{2021}$.

Ответ: нельзя.

№3.

Если среднее арифметическое ста натуральных чисел равно 41, то их сумма равна $41 \cdot 100 = 4100$.

Рассмотрим 99 наименьших чисел. Их сумма не менее $21 \cdot 99 = 2079$, т.к. их среднее арифметическое не менее 21. Значит, наибольшее из чисел не превосходит $4100 - 2079 = 2021$.

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\, 99 \\ \hline 189 \\ +\,189\;\; \\ \hline 2079 \end{array}$$

Пример: 99 чисел равны 21 и 1 число равно 2021.

Заметим, что т.к. среднее арифметическое 99 наименьших чисел не менее 21, то среднее арифметическое любых 99 чисел не менее 21.

Ответ: 2021.

№5.

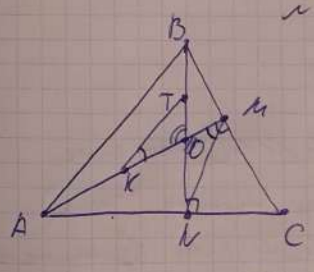
Т.к. пола всего 2, то найдётся хотя бы 141 участник одного пола (иначе их не более $140 \cdot 2 = 280$). Т.к. всего 7 регионов, то среди этих 141 участников найдутся хотя бы 21 из одного региона (иначе их не более $20 \cdot 7 = 140$). Таким образом, у нас найдутся хотя бы 21 участник одного пола, из одного региона.

Разобьём их на группы по возрасту.

МТ-224

Заметим, что групп не более 5, т.к. иначе можно из каждой группы выбрать по 1 человеку, и тогда найдутся 6 участников попарно различного возраста, что противоречит условию. А тогда найдётся возрастная группа, в которой хотя бы 5 человек (иначе $5 \cdot 4 = 20 < 21$). Таким образом, всегда найдётся 5 человек одного возраста, пола и из одного региона.

№4.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle C > 45^\circ$
$MK = MB$, $NT = NA$
Доказать:
$MN \parallel KT$

Решение.

① Пусть $BN \cap AM = O$

② $\frac{AN}{ON} = ctg\angle MAC = ctg(90^\circ - \angle C)$

$\frac{BM}{OM} = ctg\angle NBC = ctg(90^\circ - \angle C)$

Значит, $\frac{AN}{ON} = \frac{BM}{OM}$

$\frac{AN}{ON} - 1 = \frac{BM}{OM} - 1$

$\frac{AN - ON}{ON} = \frac{BM - OM}{OM}$

$\frac{TN - ON}{ON} = \frac{KM - OM}{OM}$

$\frac{TO}{ON} = \frac{KO}{OM}$

③ $\triangle KTO \sim \triangle$ ~~[illegible]~~ MNO (по 2-м сторонам и углу между ними)

1) $\angle TOK = \angle NOM$ (как вертикальные)

2) $\frac{TO}{ON} = \frac{KO}{OM}$ (по доказанному)

Значит, $\angle TKO = \angle NMO$, но $KT \parallel MN$.

④ Заметим, что т.к. $\angle C > 45^\circ$, то $\angle MAC < 45^\circ$, но $TN > ON$

$\angle CBN < 45^\circ$, но $MK > OM$

МТ-224