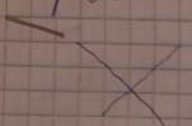
Черновик.



МК-204

4100
2021
2079

2079

2021
2021

$0,0,0,0,0$

58

$S = 4106$

$S - a_i \geq 21 \cdot 99$

$a_i \leq 4100 - 21 \cdot 99$

$a_i \leq 2021$

$(0; b)$

$y = -x + b$

$b = 0 + 1$

$1 = b$

$\begin{array}{r} 2100 \\ 21 \\ \hline \boxed{2079} \end{array}$

$\begin{array}{r} 4100 \\ 2079 \\ \hline 2021 \end{array}$

$-x + b = 0$

$x = b$

$b^2 + ab + b = 0$

$b(b + a + 1) = 0$

$a + b + 1 = 0$

$x = 1$

$\frac{x}{y} \to \frac{x+n}{y+n}$

$\begin{array}{r} 2021 \\ 1981 \\ \hline 4100 \end{array}$

$98(1+n)$

$y(x+n)$

$\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{xn}{yn}$

$xn - yn$

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $1 - y < 0$

98

$2021 \quad \underbrace{1111}$

$\begin{array}{r} 4100 \\ 1119 \\ \hline 2981 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2021 \\ 98 \\ \hline 2119 \end{array}$

№1.

МК-204

Из рисунка видно, что прямая AB не параллельна оси Ox $\Rightarrow$ её можно задать уравнением $y = K_2 x + B_2$.

По признаку (свойству) перпендикулярности графиков прямых $y = K_1 x + b_1$, $y = K_2 x + b_2$ $K_1 \cdot K_2 = -1$ (исключая вертикальные и горизонтальные прямые). Т.к. $\Gamma_{y = K_2 x + b_2} \perp \Gamma_{y = 1 \cdot x}$, то $K_2 \cdot 1 = -1$ $K_2 = -1$, т.е. прямая AB имеет уравнение $y = -x + B_2$.

Точка $B \in \Gamma_{y = x^2 + ax + b}$, у координата x координата равна 0, то y координата равна b. $B \in \Gamma_{y = -x + B_2}$, т.е.

$b = -0 + B_2$ $B_2 = b$ Получаем уравнение прямой AB: $y = -x + b$

A принадлежит AB и имеет координату $y = 0$, то $0 = -x + b$ $x = b$ $A(b; 0)$

Также $A \in \Gamma_{y = x^2 + ax + b}$

$0 = b^2 + ab + b$

$0 = b(b + a + 1)$

из рисунка A не совпадает с (0,0), то $b \neq 0$ $\Rightarrow$

$0 = a + b + 1$, но тогда $x = 1$ корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, т.е. точка $(1;0) \in Г_{y = x^2 + ax + b}$ - лежит справа от $(0;0)$ на оси Ox $\Rightarrow$ совпадает с точкой C, то $OC = 1$

Ответ: 1.

№2

~~Докажем, что дробь не уменьшается после операций~~. Для начала скажем, что числитель и знаменатель всегда натуральные (прибавление и умножение на натуральное не рушит этого свойства). Пусть есть дробь $\frac{x}{y}$.

Докажем, что дробь не уменьшается и при этом числитель всегда меньше знаменателя. Для начала заметим, что при умножении на натуральное и сложении с натуральным числитель и знаменатель остаются натуральными. Пусть есть дробь $\frac{x}{y}$, что $x \in N$, $y \in N$, $x < y$. ЛК-204

1) при сложении с n

$$\frac{x+n}{y+n} - \frac{x}{y} = \frac{xy + yn - xy - xn}{(y+n)y} = \frac{\overbrace{(y-x)}^{>0}\overbrace{n}^{>0}}{\underbrace{(y+n)\cdot y}_{>0}} > 0,$$ то

дробь увеличилась и

$x < y \Rightarrow x + n < y + n$

2) при умножении на $n \in N$

$\frac{xn}{yn} = \frac{x}{y}$ - дробь не уменьшилась и

$x < y \Rightarrow xn < yn$

Таким образом после любых действий числитель остается меньше знаменателя и дробь не уменьшается.

$$\frac{1000}{2021} = \frac{2000}{4042} < \frac{2021}{4042} = \frac{1}{2}$$, т.е.

из $\frac{1}{2}$ нельзя получить $\frac{1000}{2021}$.

Ответ: нельзя.

№3.

Пусть числа $a_1, a_2, .., a_{100}$. Их сумма S. по условию

$\frac{S}{100} = 41$ $S = 4100$

и для любого $i \in N$ $1 \le i \le 100$

$\frac{S - a_i}{99} \ge 21$

$S - a_i \ge 2079$

$a_i \le S - 2079$

$a_i \le 2021$

т.е. все числа ≤ 2021.

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 21 \\ \hline 99 \\ 198\ \ \\ \hline 2079 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4100 \\ -\ 2079 \\ \hline 2021 \end{array}$$

Приведём пример, где максимальное

число 2021. ЛК-204

$a_1 = 2021;\ a_2 = 1981;\ a_3 = a_4 = ... = a_{100} = 1$

сумма $2021 + 1981 + 98 = 4100$, то среднее арифм. $= 41$

$$\frac{S - a_i}{99} \ge \frac{4100 - a_i}{99} \ge \frac{4100 - 2021}{99} = \frac{2079}{99} = 21,$$

т.е. набор подходит.

Ответ: 2021.

№5.

Выберем пол, школьников которого больше. Пусть без ограничений общности это мальчики. Их хотя бы $\lceil \frac{281}{2} \rceil = 141$ по принципу Дирихле.

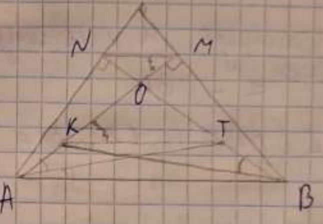
Выберем регион, школьников мальчиков которого больше всего. ~~Пуст~~ Назовем его регионом А. В нём по принципу Дирихле хотя бы $\lceil \frac{141}{7} \rceil = 21$ школьнику мальчику. Таким образом имеет хотя бы 21 мальчика из региона А

Предположим среди них 6 или более различных возрастов. Тогда возьмем по 1 представителю 6 возрастов и получим противоречие условию, что в любой группе с 6 мальчиков по меньшей мере двое одного возраста. Значит среди мальчиков из региона A не более 5 возрастов. Выберем возраст x, ~~мальчиков~~ у которого больше всего мальчиков из региона A с таким возрастом. По принципу Дирихле хотя бы $\lceil \frac{21}{5} \rceil$ (так делить на меньшее 5 число) $=$

$= 5$. Т.е. ~~был~~ мы нашли хотя бы 5 мальчиков из региона A с возрастом x, тем самым доказали требуемое.

№ 4. МК-204

$BN \cap AM = O$



1) $\angle C > 45^\circ \Rightarrow \angle NBC = 180 - 90 - \angle C < 45^\circ$

$\angle NBC = \angle OBM < 45^\circ \Rightarrow$

$\angle MOB = 180 - 90 - \angle OBM > 45^\circ$

в $\triangle MOB$ $\angle MOB > \angle MBO \Rightarrow MB > MO$, то K лежит на AO, ведь иначе $K \in MO \Rightarrow MK \leq MO < MB$, а по условию $MK = MB$, противоречие $K \in AO$, полностью аналогично $T \in OB$

2) пусть $\angle C = \beta$, $\angle A = \alpha$ ($\angle C = \angle ACB$, $\angle A = \angle CAB$)

$\angle MAC = 180 - \angle AMC - \angle ACM = 180 - 90 - \beta =$
$= 90 - \beta$

$\triangle NAT$ прямоугольный и равнобедр.

ЛК-204

Из условия ~~что~~ $CAN = NT$ и BN - высота,
то $\angle NAT = 45^\circ$, аналогично
с ΔMKB он прямоуг. и равнобедр.,
то $\angle MKB = 45^\circ = \angle MBK$

$\angle KAT = \angle NAT - \angle CAM = 45 - (90 - \beta) =$
$= \beta - 45$

$\angle CBN = 180 - \angle BNC - \angle NCB = 90 - \beta$, то
$\angle KBT = \angle MBK - \angle CBN = 45 - (90 - \beta) =$
$= \beta - 45$

3.) $\angle KAT = \angle KBT$ и они
опираются на KT, то четырёхугольник $AKTB$ вписанный по признаку.
то углы опирающиеся на BT
равны $\angle TAB =$ ~~$\angle KAT$~~ $\angle TKB$
$\angle TAB = \angle BAC - \angle NAT = \alpha - 45$, то
$\angle TKB = \alpha - 45$
$\angle MKT = \angle MKB - \angle TKB = 45 - (\alpha - 45) =$
$= 90 - \alpha$

4.) в прямоугольных ΔNCB и ΔANC

$$\frac{MC}{AC} = \cos \angle C = \frac{NC}{BC}$$, то

$\Delta NCM \sim \Delta BCA$ по 2 сторонам
и углу между ними $\angle C$ - общий
$\frac{MC}{AC} = \frac{NC}{BC}$, то

$\angle NMC = \angle BAC = \alpha$
$\angle AMN = \angle AMC - \angle NMC = 90 - \alpha$, т.е.
$\angle AMN = \angle MKT$ а они накрест
лежащие при прямых MN, KT
и секущей MK, то $MN \parallel KT$
по признаку. □