КМ-137

№1.

$f(1)+f(10)+f(100)=g(1)+g(10)+g(100)$

$1+a+b+10^2+10a+b+100^2+100a+b=1+p+q+10^2+10p+q+$
$+100^2+100p+q$

$111a+3b=111p+3q \quad |:3$

~~$37a-37p=3q-3b$~~

$37a+b=37p+q$

$37(a-p)=q-b$

Если $f(x)=g(x)$, то

$x^2+xa+b=x^2+xp+q \Rightarrow x(a-p)=q-b$, что равно $37(a-p)$

$x(a-p)=37(a-p)$

I случай $a=p$, то

$q-b=37(a-p)=0 \Rightarrow b=q \Rightarrow$ трёхчлены совпадают, что противоречит условию

II случай $a\neq p$, то

$a-p\neq 0$

сократим $x(a-p)=37(a-p)$ на $(a-p)$

$x=37$

Ответ: $f(x)=g(x)$ только при $x=37$.

+

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	7	7	28

КМ-137

№2.

В левых частях равенств стоят $\geqslant 0$ числа, так как числитель (квадрат числа) неотрицателен и знаменатель (квадрат числа $+1 \geqslant 1$) > 0. То есть и исходные числа $\geqslant 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{(2x^2+2)-2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$$

Рассмотрим любые 2 числа $\leq x_1 < x_2$, то

$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \Rightarrow$ (т.к. $x_i^2+1 > 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1} > \frac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1^2+1} < \frac{-1}{x_1^2+1} \Rightarrow$$

$$\cancel{2}\ 1 - \frac{1}{x_1^2+1} < 1 - \frac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow 2 - \frac{2}{x_1^2+1} < 2 - \frac{2}{x_2^2+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, т.е. $f(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$ по определению

Докажем, что $x = y = z$

I сл. $x \geqslant y$, то $f(x) \geqslant f(y)$, но по равенствам из условия это $y \geqslant z \Rightarrow f(y) \geqslant f(z)$ и аналогично из условия из этого следует, что $z \geqslant x$

КМ-137

$x \geq y \geq z \geq x$, то есть и y и z лежат в $[x; x]$, т.е. все числа равны

II случай

$y < x$, то $f(y) < f(x)$, пользуясь равенствами из условия получаем, что $z < y \Rightarrow f(z) < f(y)$ и ещё раз по равенствам из условия $x < z$, т.е. $x < z < y < x \Rightarrow x < x$ – Противоречие.

Имеем, что $x = y = z$, то

$\frac{2x^2}{x^2+1} = x \quad 2x^2 = x^3 + x$

$x^3 + x - 2x^2 = 0 \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x(x-1)(x-1) = 0$, то корни

$x = y = z = 0$ и

$x = y = z = 1$, нетрудно убедиться, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$ и эти решения подходят

Ответ: $x = y = z = 0$

$x = y = z = 1$

+

КМ-137

№4.

По неравенству треугольника

$a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$

$a+b-c>0$, $a+c-b>0$, $b+c-a>0$

I. $(a+b-c)>0$ и $(a+c-b)>0$, то

$(a+b-c)\cdot(a+c-b)>0$

$a^2-(b-c)^2>0 \Rightarrow a^2>(b-c)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+2bc>b^2+c^2 \Rightarrow \frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1$

$b^2+c^2\neq 0$, так как $a>0, b>0, c>0$

II. $(a+b-c)>0$ и $(b+c-a)>0$, то

$(a+(b-c))\cdot(b+c-a)>0$

$b^2-(a-c)^2>0$, $b^2>(a-c)^2$

$b^2+2ac>a^2+c^2 \Rightarrow \frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}>1$, $a^2+c^2>0$

так как $a>0, b>0, c>0$

III. $(a+c-b)>0$ и $(b+c-a)>0$, то

$(a+c-b)\cdot(b+c-a)>0$

$c^2-(a-b)^2>0 \Rightarrow c^2>(a-b)^2 \Rightarrow$

$c^2+2ab>a^2+b^2 \Rightarrow \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>1$, $a^2+b^2>0$,

так как $a>0$ и $b>0$

(+)

сложим 3 полученных неравенства

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3,$$ что

и требовалось доказать.

№ 5.

Предположим число 1 белое. Найдём чёрное число x. Тогда по условию $(1\cdot x)$ белое, но оно чёрное. Противоречие. Значит 1 – чёрное. Предположим самое маленькое белое число равно **K**. Тогда числа от $[1; K-1]$ чёрные. Рассмотрим любое число x из этого промежутка. Оно чёрное, то $(x+K)$ - чёрное, тогда и $((x+K)+K)$ - чёрное и т.д. Будем получать, что число вида $(x+nK)$ черное, то т.к. K - белое, то $(x+(n+1)K)$ - чёрное, а значит рассмотрев все такие x от $[1$ до $K-1$ получим, что все числа не кратные K чёрные.

КМ-137

Теперь рассмотрим числа $\vdots k$ вида kn. Если $n \not\vdots\, k$, то n – чёрное, тогда произведение белого и чёрного – белое, то есть kn – белое при $n \not\vdots\, k$.
Предположим существует $n \vdots k$, что nk – чёрное. Тогда $(nk+k)$ – ~~бе~~ чёрное, как сумма белого и чёрного.

$nk + k = k(n+1)$, т.к. $n \vdots k$, то $n+1 \equiv 1 \pmod{k}$ из ранее доказанного $k \neq 1$, т.е. $k > 1$, то $(n+1) \not\vdots\, k$. Но мы ранее получили, что такие числа kx, где $x \not\vdots\, k$ белые, то $k(n+1)$ – белое и чёрное. Получили противоречие. Значит при всех $n \vdots k$ nk – белое.

+

Имеем, что все числа $\vdots k$ – белые, $\not\vdots\, k$ – чёрные и $k > 1$. Тогда произведение 2 белых $\vdots k^2$, т.е. $\vdots k$ и это число белое, что и требовалось доказать.