№1

$2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2017^2=$

$=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\ldots+(2018^2-2017^2)=$

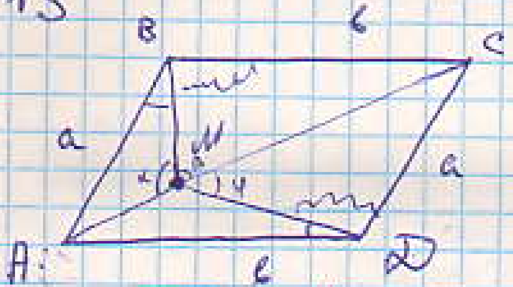
$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)(6+5)+\ldots+(2018-2017)(2018+2017)=$

$=1(2+1)+1(4+3)+1\cdot(6+5)+\ldots+1\cdot(2018+2017)=$

$=1+2+3+4+5+6+\ldots+2017+2018=$

$=\frac{2018\cdot2019}{2}=1009\cdot2019=2037171$ (+)

№3



1) Пусть ~~BMA~~ $AB=CD=a$, $BC=AD=b$

В $\triangle BMA$, по обобщ. теор. синусов

$\frac{a}{\sin\angle BMA}=\frac{AM}{\sin\angle ABM}$

Нет условия $M\in AC$ в форм-ке задачи.

$\triangle AMD$

$\frac{b}{\sin\angle AMD}=\frac{AM}{\sin\angle MDA}$, т.к. $\angle ABM=\angle MDA$, $\sin\angle ABM=\sin\angle MDA$

$\frac{a}{\sin\angle BMA}=\frac{b}{\sin\angle AMD}$; $\frac{\sin\angle AMD}{\sin\angle BMA}=\frac{b}{a}$

2) $\underline{\angle MBC}=\angle ABC-\angle ABM=\angle ADC-\angle MDA=\underline{\angle MDC}$

$\triangle MCD$: $\dfrac{a}{\sin\angle CMD} = \dfrac{MC}{\sin\angle CDM}$

$\triangle BMC$: $\dfrac{b}{\sin\angle BMC} = \dfrac{MC}{\sin\angle MBC}$

т.к. $\angle CDM = MBC$

$\sin\angle CDM = \sin\angle MBC$

$$\frac{a}{\sin\angle CMD} = \frac{b}{\sin\angle BMC}$$

$$\frac{\sin\angle BMC}{\sin\angle CMD} = \frac{b}{a}$$

3) Из (1) и (2) получим

$$\frac{\sin\angle BMC}{\sin\angle CMD} = \frac{\sin\angle AMD}{\sin\angle BMA}$$

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \dfrac{\sin(2\pi - (\alpha + \beta + \varphi))}{\sin\alpha}$

$\angle BMA = \alpha$

$\angle BMC = \beta$

$\angle CMD = \varphi$

тогда $\angle AMD = 2\pi - (\alpha + \beta + \varphi)$

$$\sin\beta\cdot\sin\alpha=\sin\varphi\left(\sin\left(2\pi-(\alpha+\beta+\varphi)\right)\right)$$

$$\sin\beta\cdot\sin\alpha=-\sin\varphi\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi)$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\varphi-(\alpha+\beta+\varphi)\right)-\cos(2\varphi+\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos(\beta-\alpha)-\cancel{\cos(\alpha+\beta)}=\cos(2\varphi+\alpha+\beta)-\cancel{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos(2\varphi+\alpha+\beta)$$

$$\left[\begin{array}{l}\cancel{\beta}-\alpha=2\varphi+\alpha+\cancel{\beta}+2\pi n\\ \beta-\cancel{\alpha}=-2\varphi-\cancel{\alpha}-\beta+2\pi n\end{array}\right.\qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=-\varphi+\pi k\\ \beta=-\varphi+\pi k\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\varphi=\pi k \quad (\mathrm{II})\\ \beta+\varphi=\pi k \quad (\mathrm{I})\end{array}\right.$$

(I) $\beta+\varphi=\pi k$

$0<\beta<\pi$

$0<\varphi<\pi$

$0<\beta+\varphi<2\pi$

значит, $k=1$ $\beta+\varphi=\pi$

т.к. $M\in BD$

(I) Использовано, то что $M\in AC$

тогда

$\angle ABD=\angle BDA$

т.к. $AB=AD$

значит, ABCD-ромб, $\angle BMA=\angle CMD=90^\circ$, $\angle BMA+\angle CMD=180^\circ$, чтд.

II $\varphi+\alpha=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$0<\varphi<\pi$

$0<\alpha<\pi$

$0<\varphi+\alpha<2\pi$

значит, $k=1$

$\varphi+\alpha=\pi=180^\circ$

$\angle BMA+\angle CMD=180^\circ$, ч.т.д.

На рисунке в начале показан частный случай: $M\in AC$. Однако рассуждение везде проходит и в общем случае, кроме пункта I (где легко может быть скорректировано)

$\pm$ 1

№4. $(p+1)^q$

Пусть $p+1=a_1^{k_1}\cdot a_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}$ —

где $a_1, a_2, \ldots a_n$ — простые числа, $k_1,\ldots k_n$ — натуральные числа

$(p+1)^q=a_1^{qk_1}\cdot a_2^{qk_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{qk_n}$ и

$$(p+1)^q=n^3 \Leftrightarrow \begin{cases} qk_1 \,\vdots\, 3\\ qk_2 \,\vdots\, 3\\ \ldots\\ qk_n \,\vdots\, 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q \,\vdots\, 3\\ \begin{cases} k_1 \,\vdots\, 3\\ k_2 \,\vdots\, 3\\ \ldots\\ k_n \,\vdots\, 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} q \,\vdots\, 3 & \text{I}\\ (p+1)=k^3 \quad (\text{где } k\in\mathbb{N}) & \text{II}\end{array}\right.$$

б) т.к. если при разложении на простые множители каждый показатель степени кратен 3, то число A представимо в виде:

$$A = a_1^{3b_1} \cdot a_2^{3b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{3b_n} = \left(a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n}\right)^3$$

I) $q \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow q = 3$ (т.к. q - простое)

(Если $q \,\vdots\, 3$, $q \neq 3$, то $q = 3 \cdot s$ $\left(\begin{matrix} s \in N \\ s > 1 \end{matrix}\right)$, т.к. q - составное.)

Значит, если $q = 3$, а p - любое простое, то условие задачи выполнено.

II) $p + 1 = k^3$ ($k \in N$, p - простое)

$p = k^3 - 1$

$p = (k-1)(k^2+k+1)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k-1 = p \\ k^2+k+1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} k-1 = 1 \\ k^2+k+1 = p \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k^2+k = 0 \\ k-1 = p \end{cases} \\ \begin{cases} k = 2 \\ k^2+k+1 = p \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -1 \end{array}\right. \\ k-1 = p \end{cases} \\ \begin{cases} k = 2 \\ 4+2+1 = p \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} k = 2 \\ p = 7 \end{cases} \quad p = 7$$

$k \notin N$

$(p+1)^q = 8^q = (2^q)^3 = n^3$

Ответ: либо $q = 3$, p - любое простое

либо $p = 7$, q - любое простое +

№2 $\begin{cases} x(1+\sqrt{y}) = 2 \\ y(1+\sqrt{z}) = 2 \\ z(1+\sqrt{x}) = 2 \end{cases}$

~~$y = x$~~

x, y, z - положительные

т.к. $x \neq 0$

$x(1+\sqrt{y}) = 2$

$\Downarrow$

$x > 0$

т.к. $x > 0$

аналогично $y > 0$

$z > 0$

$\begin{cases} \sqrt{y} = \frac{2}{x} - 1 \\ \sqrt{z} = \frac{2}{y} - 1 \\ z = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \left(\frac{2}{x} - 1\right)^2 \\ z = \left(\frac{2}{y} - 1\right)^2 \\ z = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \left(\frac{2}{x} - 1\right)^2 \\ z = \left(\frac{2}{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2} - 1\right)^2 \\ z = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \end{cases}$

$$\left(\frac{2}{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-1\right)^2=\frac{2}{1+\sqrt{x}}$$

$$f(t)=\left(\frac{2}{t}-1\right)^2$$

$$f'(t)=\left(\left(\frac{2-t}{t^2}\right)^2\right)'=\left(\frac{(t-2)^2}{t^2}\right)'=$$

$$=\left(\frac{t^2-4t+4}{t^2}\right)'=(2t-4)t^2-2t(t$$

№2
$$\begin{cases} x(1+\sqrt{y})=2 & (1)\\ y(1+\sqrt{z})=2 & (2)\\ z(1+\sqrt{x})=2 & (3)\end{cases}$$

1) т.к. x, y, z под корнем

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$z \geq 0$

2) Пусть $x=0$, тогда $0(1+\sqrt{y})=0$ – противоречие, значит, $x\neq0$, т.е. $x>0$

аналогично, $y>0$, $z>0$

3) ① Пусть $x<1$, тогда

пусть при этом $y\leq1$,

тогда $x(1+\sqrt{y})<1\cdot(1+1)<2$ – противоречие

т.е. $y>1$

Пусть при этом $z\leq1$, тогда

Из (3) $z(1+\sqrt{x})<1(1+1)<2$ – противоречие

т.е. $z>1$

~~Тогда $z \lt 2$~~

Тогда $y > 1$

$z > 1$

$\sqrt{z} > 1$

$y(\sqrt{z}+1) > 2$ — противоречит с (2)

Значит, такой ситуации быть не может и $x \geq 1$

(2) Пусть теперь $x > 1$

Аналогично п. (1)

из (1) получаем, что $y < 1$

из (3) получаем, что $z < 1$

$y(\sqrt{z}+1) < 2$ — противоречит с (2)

Значит, такое невозможно и $x \leq 1$

тогда необходимо чтобы x было равно 1.

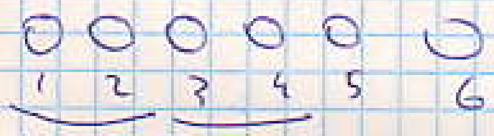
$$\begin{cases} x=1 \\ x(1+\sqrt{y})=2 \\ y(1+\sqrt{z})=2 \\ z(1+\sqrt{x})=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ 1+\sqrt{y}=2 \\ z\cdot 2=2 \\ y(1+\sqrt{z})=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ 1(1+1)=2 \text{ — верно} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Ответ: $(1;1;1)$.

+

№5.



1) Взвешиваем $1+2=S$

2) Взвешиваем $3+4=K$

I. Если $S=K$, то среди 1 2 3 4 фальшивой нет. 3) взвешиваем $5=P$

Если $\frac{S}{2}=P$, то 5 настоящая (т.к. её вес равен весу настоящих), тогда 6 — фальш.

Если $P \neq \frac{S}{2}$, то

5 – фальшивая.

$\boxed{\text{II}}$ Если $S \neq K$

то фальш. среди 1–6,

т. к. 5 – настоящая

$\frac{1}{2}$