Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады по математике
10 класс
154-750-871 82

1	2	3	4	5	Σ
7	7	4	7	7	32

ErichKrause

тетрадь

для

учени ... класса

школы

18

клетка

Чистовик

№1.

Допустим, подобрать такие 6 чисел можно, тогда из них ровно 4 числа делятся на 3, и ровно 5 чисел делятся на 2, значит, как минимум 3 числа делятся и на 3, и на 2, то есть, делятся на 6, но такое число должно быть ровно 1. Противоречие. Допущение неверно, значит, ~~таких~~ такие 6 натуральных чисел подобрать нельзя

Ответ: нельзя.

№2

$$f(x) = x^2 + px + q$$

- $f(1) = 1 + p + q$

$f(q) = q^2 + pq + q = q(q + p + 1) = q \cdot f(1)$

Так как ~~числа~~ $f(1)$ и $f(q)$ принимают значение разных знаков, то $f(1)$ и $q \cdot f(1)$ тоже принимают значения разных знаков.

Так как в результате умножения $f(1)$ на q знак сменился, то $q<0$.

• $x^2+px+q=0$

$D=p^2-4q$

$q<0$

$4q<0$

$-4q>0$

$p^2-4q>0$

значит, при любых p и $q<0$ $D>0$, уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

① $q<0$

$-q>0$

$-4q>0$

$p^2-4q>p^2$

$\sqrt{p^2-4q}>|p|$

② $\sqrt{p^2-4q}>|p|\geq p$

$\sqrt{p^2-4q}>p$

$-p+\sqrt{p^2-4q}>0$

$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}>0$

значит, $x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}>0$

при любых p и $q<0$

③ $\sqrt{p^2-4q} > |p| \geq -p$

$\sqrt{p^2-4q} > -p$

$-p - \sqrt{p^2-4q} < 0$

$\frac{-p - \sqrt{p^2-4q}}{2} < 0$

значит, $x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} < 0$

при любых p и $q<0$

. Следовательно, при любых значениях p и $q<0$ корни квадратного трёхчлена имеют разные знаки.

№3

Дано: $\triangle ABC$

M - середина AC

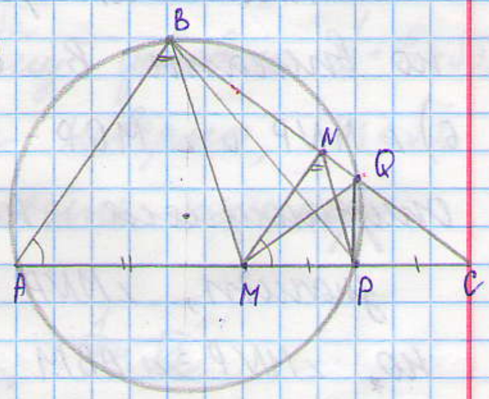
P - середина CM

окр$(O;r)$ описана около $\triangle ABP$

окр$(O;r) \cap (BC) = Q$

Доказать: $\angle ABM = \angle MQP$

Доказательство:



I Если $MQ \nparallel AB$

1) Д.п.: $MN \parallel AB$, $N \in BC$

2) $\triangle ABC$

M - середина AC, $MN \parallel AB$

значит, MN - средняя линия $\triangle ABC$ (по признаку)

$MN = \frac{1}{2} AB$ (по свойству средней линии)

3) $\triangle ABM$ и $\triangle MNP$ ($MP = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}AM$)

$\frac{BA}{NM} = \frac{AM}{MP} = \frac{2}{1}$, $\angle BAM = \angle NMP$ (как соответственные при $MN \parallel AB$, AM - секущей)

значит, $\triangle ABM \sim \triangle MNP$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними)

следовательно, $\angle ABM = \angle MNP$

4) $MN \parallel AB \rightarrow \angle CBA = \angle CNM$, $\angle CAB = \angle CMN$ (как соответственные)

5) $\nabla ABQP$ вписан в окр $(O; r)$

(по св-ву четырёхугольника, вписанного в окружность)

значит, $\angle ABQ + \angle APQ = \angle BAP + \angle BQP = 180°$

$\angle ABC + \angle MPQ = \angle BAC + \angle NQP = 180°$

$\angle MNC + \angle MPQ = \angle NMC + \angle NQP = 180°$

$\angle MNQ + \angle MPQ = \angle NMP + \angle NQP = 180°$

следовательно, по признаку ~~четырё~~ вписанного четырёхугольника, $MNQP$ можно вписать в окружность.

6) $\angle MNP$ и $\angle MQP$ - ~~углы~~ вписанные углы, опирающиеся на $\smile MP$

значит, $\angle MNP = \angle MQP$,

но, $\angle MNP = \angle ABM$

следовательно, $\angle ABM = \angle MQP$

(+)

II Если MQ ∥ AB, то доказательство равенства ∠ ABM и ∠MQP аналогично (3) пункту. При другом расположении точек Q и N?

№5 $a \in R$, $b \in R$, $a>0$, $b>0$

$a;\ \frac{1}{a}+b;\ \frac{1}{b}$

• Допустим, $m>\sqrt{2}$, тогда все числа из этого ряда больше $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} a>\sqrt{2} \\ \frac{1}{b}>\sqrt{2} \\ \frac{1}{a}+b>\sqrt{2} \end{cases}$$

но, т.к. $a>\sqrt{2} \rightarrow 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{2}}$

т.к. $\frac{1}{b}>\sqrt{2} \rightarrow 0<b<\frac{1}{\sqrt{2}}$

значит, $\frac{1}{a}+b<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\rightarrow \frac{1}{a}+b<\sqrt{2}$

но по предположенному условию $\frac{1}{a}+b>\sqrt{2}$

значит, допущение неверно, $m \leq \sqrt{2}$

а для $m=\sqrt{2}$ есть пример

$a=\sqrt{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a=\sqrt{2}$, $\frac{1}{a}+b=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $\frac{1}{b}=\sqrt{2}$

значит, максимально возможное $m=\sqrt{2}$

+

• ~~Допустим~~ Если, $m = a = \sqrt{2}$,

тогда $\frac{1}{a} + b \geq \sqrt{2}$, $\frac{1}{b} \geq \sqrt{2}$

$$\frac{1}{a} + b \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + b \geq \sqrt{2}$$

$$b \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

но $\frac{1}{b} \geq \sqrt{2}$, значит, $\frac{1}{b} = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Если $m = \frac{1}{b} = \sqrt{2}$, $(b = \frac{\sqrt{2}}{2})$

тогда $\frac{1}{a} + b \geq \sqrt{2}$, $a \geq \sqrt{2}$

$$\frac{1}{a} + b \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow a \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

но $a \geq \sqrt{2}$, значит, $a = \sqrt{2}$

• Если $m = b + \frac{1}{a} = \sqrt{2}$,

тогда $a \geq \sqrt{2} \longrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{b} \geq \sqrt{2} \longrightarrow b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{a} + b \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

но $\frac{1}{a} + b = \sqrt{2}$, значит, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \sqrt{2}$

~~Ответ~~ Следовательно, $m = \sqrt{2}$ только при $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: наибольшее возможное значение $m = \sqrt{2}$. Достигается только при $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

№4.

Пусть в клубе m толстых людей и n тонких. $(m \in N, n \in N)$

• m толстых людей принесли по 15 пончиков, значит, всего $15m$

Так как каждому тонкому досталось равное кол-во пончиков,

$$15m \vdots n \to 15m = kn, \ k \in N$$

Аналогично, $14n = pm$, $p \in N$

• $15m = kn \to m = \frac{kn}{15}$

$14n = pm = \frac{pkn}{15}$

$14 = \frac{pk}{15}$

$pk = 14 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Все возможные варианты p и k: $(p \in N, k \in N)$

1; 2; 3; 5; 6; 7; 10; 14; 15; 21; 30; 35; 42; 70; 105; 210.

• $15m = kn \to \frac{m}{n} = \frac{k}{15} \to \frac{m}{58-m} = \frac{k}{15} \to$

$\to 15m = k \cdot 58 - km = m = \frac{58k}{15+k}$

Рассмотрим все возможные варианты m в зависимости от k:

$m = \frac{58k}{15+k}$

1) $k = 1$ $\quad m = \frac{58}{16} = 3\frac{5}{8}$
2) $k = 2$ $\quad m = \frac{116}{17} = 6\frac{14}{17}$
3) $k = 3$ $\quad m = \frac{58 \cdot 3}{18} = \frac{58}{6} = 9\frac{2}{3}$
4) $k = 5$ $\quad m = \frac{58 \cdot 5}{20} = \frac{58}{4} = 14\frac{1}{2}$
5) $k = 6$ $\quad m = \frac{58 \cdot 6}{21} = \frac{58 \cdot 2}{7} = 16\frac{4}{7}$
6) $k = 7$ $\quad m = \frac{58 \cdot 7}{22} = \frac{29 \cdot 7}{11} = 18\frac{5}{11}$
7) $k = 10$ $\quad m = \frac{58 \cdot 10}{25} = \frac{116}{5} = 23\frac{1}{5}$
8) $k = 14$ $\quad m = \frac{58 \cdot 14}{29} = 28$
9) $k = 15$ $\quad m = \frac{58 \cdot 15}{30} = 29$
10) $k = 21$ $\quad m = \frac{58 \cdot 21}{36} = \frac{29 \cdot 7}{6} = 33$
11) $k = 30$ $\quad m = \frac{58 \cdot 30}{45} = \frac{58 \cdot 2}{3} = 38$
12) $k = 35$ $\quad m = \frac{58 \cdot 35}{50} = \frac{29 \cdot 7}{5} = 40$
13) $k = 42$ $\quad m = \frac{58 \cdot 42}{57} = \frac{58 \cdot 14}{19} = 42$
14) $k = 70$ $\quad m = \frac{58 \cdot 70}{85} = \frac{58 \cdot 14}{17} = 47$
15) $k = 105$ $\quad m = \frac{58 \cdot 105}{120} = \frac{29 \cdot 7}{4} = 50$
16) $k = 210$ $\quad m = \frac{58 \cdot 210}{225} = \frac{58 \cdot 14}{15} = 5$

(+)

но, так как m обозначает кол-во человек, $m \in N$, $m = 28$ или $m = 29$

$m = 28 \downarrow n = 30$ $\qquad$ $m = 29 \downarrow n = 29$

• Если $m = 28$, $n = 30$

$$15m = 28 \cdot 15 = 14 \cdot 30 = 14n$$

• Если $m = 29$,

$$15 \cdot m = 29 \cdot 15 = 15 \cdot 29 = 15n$$

$$14m = 29 \cdot 14 = 14 \cdot 29 = 14n$$

значит, оба случае возможны

Ответ: в кружке либо 28 толстых

людей, 30 тонких, либо толстых и тонких по 29.